2008年　東大数学　文系 第3問 ①

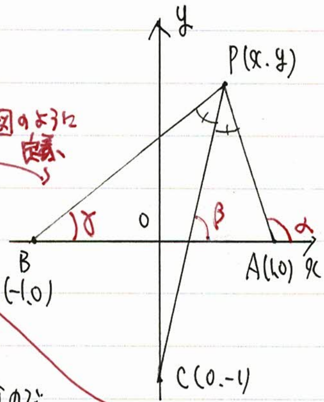
座標 + 角度 ⇒ tan の加法定理
ベクトルの内積 (余弦定理)
点Pの軌跡を求めよ ⇒ P(x, y) とおく.
基本方針

P(x, y) とおく.

$\boxed{\text{解法1. tanの加法定理}}$

直線PA, PC, PBが x軸となす角をそれぞれ α, β, γ とすると。

右図のように定義



tanの分母≠0
$x \neq -1, 0, 1$ のとき
直線PA, PC, PBの傾きが

$\dfrac{y-0}{x-1}$, $\dfrac{y-(-1)}{x-0}$, $\dfrac{y-0}{x-(-1)}$ なので.

$\tan\alpha = \dfrac{y}{x-1}$　$\tan\beta = \dfrac{y+1}{x}$　$\tan\gamma = \dfrac{y}{x+1}$ である。

点Pの場所によって、αとβの大小が不明なので、±とつけておく。

$$\tan\angle APC = \pm\tan(\alpha-\beta) = \pm\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \pm\frac{\frac{y}{x-1} - \frac{y+1}{x}}{1 + \frac{y}{x-1}\times\frac{y+1}{x}}$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= \pm\frac{xy-(x-1)(y+1)}{x(x-1)+y(y+1)}$$

ここも、βとγの大小に留意して、±をつけた。

$$\tan\angle BPC = \pm\tan(\beta-\gamma) = \pm\frac{\tan\beta - \tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma}$$

$$= \pm\frac{\frac{y+1}{x} - \frac{y}{x+1}}{1 + \frac{y+1}{x}\cdot\frac{y}{x+1}}$$

$$= \cdots$$

$$= \pm\frac{(x+1)(y+1) - xy}{x(x+1)+y(y+1)}$$

∠APC = ∠BPC から tan∠APC = tan∠BPC なので.
これは必要十分条件ではない。

$$\pm\frac{xy-(x-1)(y+1)}{x(x-1)+y(y+1)} = \pm\frac{(x+1)(y+1)-xy}{x(x+1)+y(y+1)}$$

±A = ±B は A = ±B としてよい (同符号か異符号かの2択なので)

$$\therefore \frac{xy-(x-1)(y+1)}{x(x-1)+y(y+1)} = \pm\frac{(x+1)(y+1)-xy}{x(x+1)+y(y+1)}$$

(i) $\dfrac{xy-(x-1)(y+1)}{x(x-1)+y(y+1)} = \dfrac{(x+1)(y+1)-xy}{x(x+1)+y(y+1)}$ のとき　複号のプラスのとき。

(計算をとても頑張る)

$x(x^2+y^2-1)=0$　$\therefore x^2+y^2-1=0$

x≠0なので.

(ii) $\dfrac{xy-(x-1)(y+1)}{x(x-1)+y(y+1)} = -\dfrac{(x+1)(y+1)-xy}{x(x+1)+y(y+1)}$ のとき　複号のマイナスのとき。

(計算をとても頑張る)

$y(x^2+(y+1)^2)=0$　$\therefore y=0$

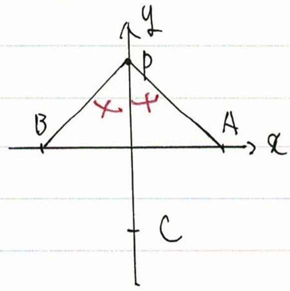
$x \neq 0$ のとき、$x^2+(y+1)^2>0$

以上より、$x \neq -1, 0, 1$ のとき、$x^2+y^2-1=0$ または $y=0$
前半の結論

次に、$x=-1$, $x=0$, $x=1$ の場合を調べる。

tanの加法定理は、分母が登場し、場合わけが増えるのが難点。
正直、場合分けが多くなるのが判明する序盤で、別の方針(ベクトルの内積など)に切り替えても良いと思う。

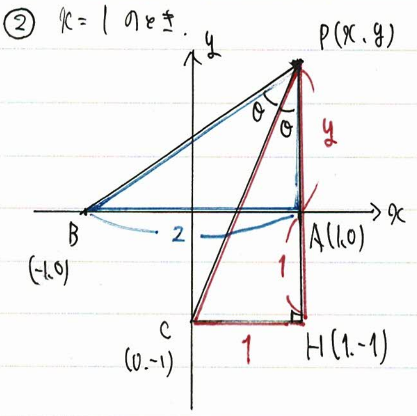
① $x=0$ のとき。(但し、点Pは点Cに一致しないため、$y \neq -1$)



左図のように、必ず ∠APC = ∠BPC なので成立。

2008年　東大数学　文系 第3問 ②

② $x=1$ のとき.



多分、$x=1$ のときは $\angle APC=\angle BPC$ となる点Pはないだろうと思いつつ。
矛盾を示すために、図示。

この設計が思いつくのにも時間がかかるでしょう

△PCHについて.　$\tan\theta = \dfrac{1}{y+1}$

△PABについて.　$\tan 2\theta = \dfrac{2}{y}$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ に代入し、

$$\frac{2}{y} = \frac{2\times\frac{1}{y+1}}{1-\left(\frac{1}{y+1}\right)^2}$$

これを整理すると $y=0$

しかし、(1,0) は点A なので、$x=1$ に、題意を満たす点Pはない。

③ $x=-1$ のとき.

対称性から、② と同様に、題意を満たす点Pはない。

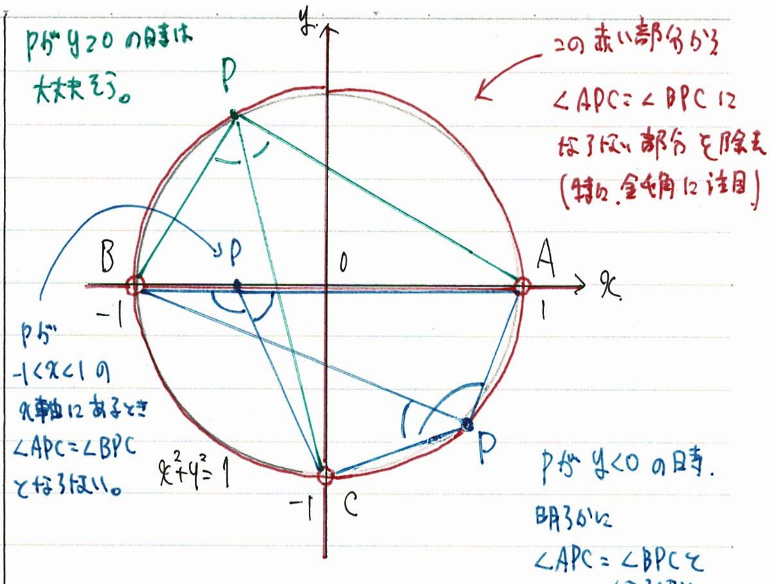
$x=-1,0,1$ の場合を調べるのも結構大変。

以上より、

- $x\neq -1,0,1$ のとき、$x^2+y^2-1=0$ または $y=0$
- $x=-1,1$ のとき、点Pはない、
- $x=0$ のとき、$y\neq -1$

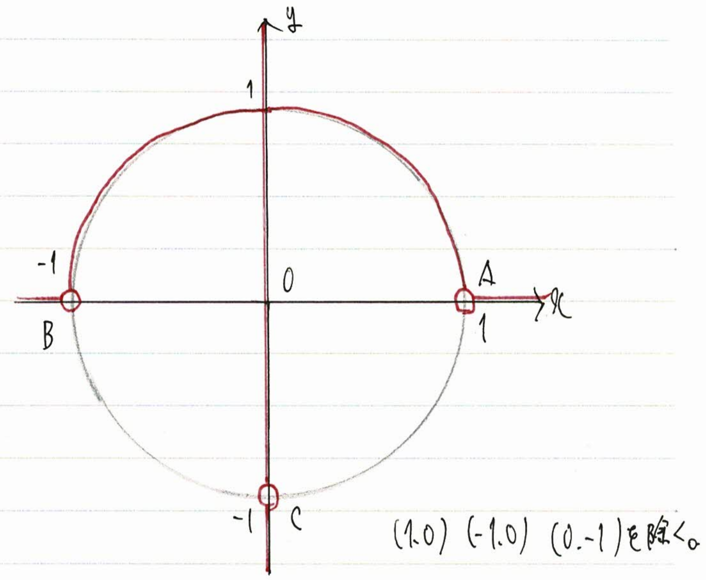
が、ここまでの条件をまとめたものである。

しかし、これは $\tan\angle APC = \tan\angle BPC$ の計算結果。
$\angle APC$ と $\angle BPC$ が鈍角の場合でも tan は一致する。
よって、十分性をチェックする。



上図のように、点Pが $y<0$ と、$y=0\ (-1<x<1)$ にあると、$\angle APC$ か $\angle BPC$ が鈍角になり一致しない。

よって、求める図は以下のよう。



(1,0) (-1,0) (0,-1) を除く。

2008年　東大数学　文系第3問 ③

解法2：ベクトルの内積

$\angle APC = \angle BPC$ となる条件は、$\cos\angle APC = \cos\angle BPC$ である。

補　tanの加法定理の場合。
$\tan\angle APC = \tan(\alpha-\beta)$ として計算したが、
① $\tan\frac{\pi}{2}$ が定義できないこと
② 点Pの場所によって α と β の大小が変わり、$\tan\angle APC$ の符号が変わること。
③ $\tan\angle APC$ の右辺に分母が生じ、0になる可能性があること。
などの不都合があった。

$A(1,0)$　$B(-1,0)$　$C(0,-1)$　$P(x,y)$ として、

$\overrightarrow{PA}=(1-x,-y)$　$\overrightarrow{PB}=(-1-x,-y)$　$\overrightarrow{PC}=(-x,-1-y)$

$\cos\angle APC = \dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|}$　$\cos\angle BPC = \dfrac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|}$ によって、なので

$$\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}|\cancel{|\overrightarrow{PC}|}} = \frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}|\cancel{|\overrightarrow{PC}|}}$$

ベクトルの内積を使うと、tan の不都合な点が解消される
① $\cos\frac{\pi}{2}$ が定義できる。
② 点Pの場所が変化して、点Pと点A,B,Cの上下しても、cos は符号変化しない。
③ $\cos\angle APC$ の分母は、点Pと点A,B,C が一致しないので、分母は0にならない。
よって、今回は cos を使う方が優れている。

$|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{(1-x)^2+(-y)^2}$　$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{(-1-x)^2+(-y)^2}$
$|\overrightarrow{PC}| = \sqrt{(-x)^2+(-1-y)^2}$ ← 実際は使わない。

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC} = (1-x)(-x)+(-y)(-1-y)$
$= x(x-1)+y(y+1)$

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} = (-1-x)(-x)+(-y)(-1-y)$
$= x(x+1)+y(y+1)$ より。

$$\frac{x(x-1)+y(y+1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \frac{x(x+1)+y(y+1)}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} \quad ―①$$

ここで $\sqrt{\ }$ があるので、2乗して計算したい。
(計算量が多くなるのは、仕方ない。勇気)
しかし、十分性が崩れるので、今のうちに符号をチェックしておく。
$A=B \Leftrightarrow A^2=B^2$ ではない。
$A=B \Leftrightarrow A^2=B^2$ かつ AとBは同符号。

$x(x-1)+y(y+1)$ と $x(x+1)+y(y+1)$ は同符号なので、

$$\begin{cases} x(x-1)+y(y+1)\geqq 0 \text{ かつ } x(x+1)+y(y+1)\geqq 0 \\ \text{または} \\ x(x-1)+y(y+1)\leqq 0 \text{ かつ } x(x-1)+y(y+1)\leqq 0 \end{cases} \quad ―②$$

この条件を満たしつつ、①を2乗

①の両辺を2乗して、

$$\frac{\{x(x-1)+y(y+1)\}^2}{x^2-2x+1+y^2} = \frac{\{x(x+1)+y(y+1)\}^2}{x^2+2x+1+y^2}$$

(頑張って整理すると、)

$4xy(x^2+y^2-1)=0$

$\therefore\ x=0,\ y=0,\ x^2+y^2-1=0$ ―③

② かつ ③ を図示すると、答え。

解法3：余弦定理　ベクトルの内積と余弦定理は、根本が同じ

$$\cos\angle APC = \frac{PA^2+PC^2-AC^2}{2\cdot PA\cdot PC} = \frac{\{(x-1)^2+y^2\}+\{x^2+(y+1)^2\}-2}{2\sqrt{(x-1)^2+y^2}\sqrt{x^2+(y+1)^2}}$$

$= \cdots$

$$= \frac{x^2-x+y^2+y}{2\sqrt{(x-1)^2+y^2}\sqrt{x^2+(y+1)^2}}$$

同様に、$\cos\angle BPC = \dfrac{x^2+x+y^2+y}{2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{x^2+(y+1)^2}}$

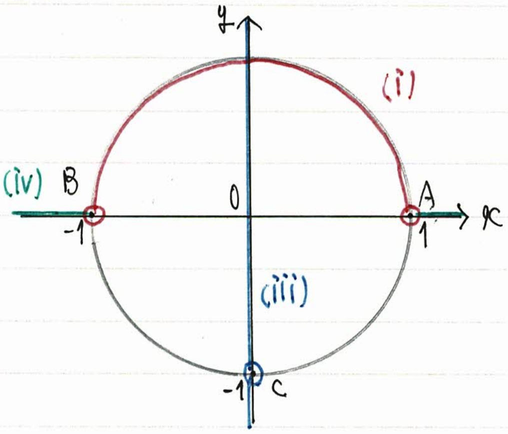
ベクトルと同じ結論

$\cos\angle APC = \cos\angle BPC$ を計算すると、①と同じ式になる。

2008年　東大数学　文系第3問 ④

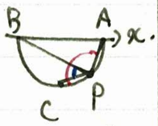
解法4：初等幾何的に解く。

点A, B, Cを通る円Cを描く。

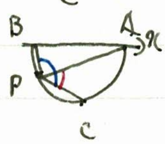


(i) 円Cの弧AC、弧BCの長さは等しいので、第1〜2象限における円上に点Pがある場合、円周角の定理から、$\angle APC = \angle BPC$ が成立する。
(点A, Bは、x軸であるため各象限には属さない。)
一応書いておいた。

(ii) 弧AC、弧BC上に点Pがある場合。
(つまり、点Pが、第3〜4象限にある)



右図のように、



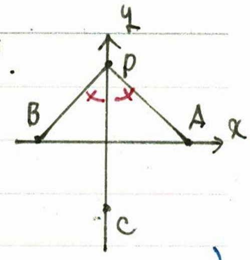
$\angle APC = 90° > \angle BPC$ (第4象限)
$\angle BPC = 90° > \angle APC$ (第3象限)
となる。

(例えば、点Pが第4象限の場合、$\angle APB$は、直径に対する円周角のため、$90°$であり、弧BCは、円周の4分の1のため、$\angle BPC < 90°$
(ちなみに$45°$))

よって、$\angle APC \neq \angle BPC$ となる。

以上で、円上の場合は、全て検討した。

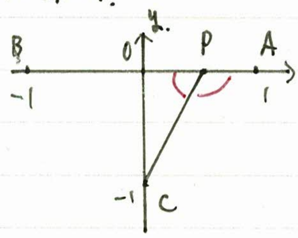
(iii) 点Pが、点C以外のy軸にある時。
y軸は、線分ABの垂直二等分線となっており、常に $\angle APC = \angle BPC$ である。



(∵△APCと△BPCにおいて、
PC共通、AC=BC、AP=BPより3辺が等しく合同。)

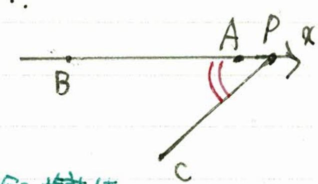
(iv) 点Pが、点A, B以外のx軸にある時。

・点Pが、線分AB上なら、



$\angle APC + \angle BPC = 180°$
なので、
点Pが原点にある時のみ、
$\angle APC = \angle BPC$ となる。(これは(iii)の領域に含まれる)

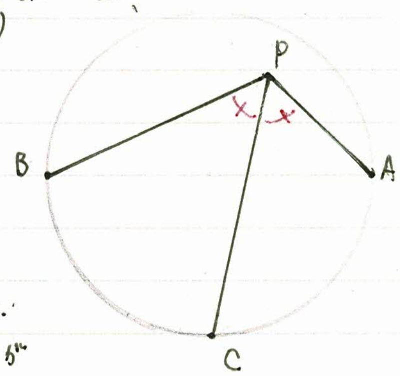
・点Pが $x>1$ のx軸にある時。
明らかに $\angle APC = \angle BPC$ となる。
$x<-1$ の時も同様。



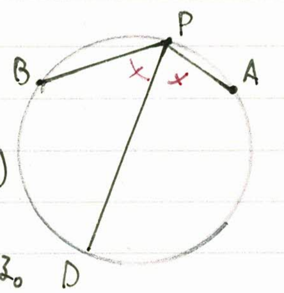
以上で、x軸、y軸上も全て検討した。

(v) 円Cの内部に、点Pがある場合。
(但し、y軸上を除く)

背理法
$\angle APC = \angle BPC$ となる点Pが存在すると仮定する。



△APBの外接円上を、PC(∠ABの二等分線)が交わる点をDとすると、
円周角の定理より、
弧AD＝弧BDとなる。
しかし、これを満たす点Dは線分ABの垂直二等分線(y軸)上にしかない。
つまり点Dは点Cと一致する。



2008年　東大数学　文系第3問⑤

すると、点A,B,P,Cが同一円周上に存在することになるが、

これは、円Cの内部に点Pが存在することに矛盾。

以上より、

y軸上を除く円Cの内部には、

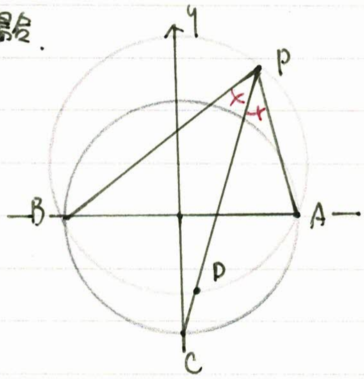
∠APC＝∠BPC を満たす点Pは存在しない。

(vi) (x軸、y軸上を除く) 円の外部に点Pが存在する場合。

(v)と同様に

点Pは存在しないことが示せる。」

これで、全ての領域を検討した。



以上より求める領域は、